MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

28. travnja 2013.

Deriviranje kompozicije funkcija jedne varijable

Ako su f i g derivabilne funkcije jedne varijable takve da je dobro definirana kompozicija $g \circ f$, onda je i $g \circ f$ derivabilna i vrijedi

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Deriviranje kompozicije funkcija jedne varijable

Ako su f i g derivabilne funkcije jedne varijable takve da je dobro definirana kompozicija $g \circ f$, onda je i $g \circ f$ derivabilna i vrijedi

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Npr, ako je $f(x) = x^2 + 7x$, a $g(x) = \sin x$, onda je

$$(g \circ f)(x) = \sin\left(x^2 + 7x\right)$$

Deriviranje kompozicije funkcija jedne varijable

Ako su f i g derivabilne funkcije jedne varijable takve da je dobro definirana kompozicija $g \circ f$, onda je i $g \circ f$ derivabilna i vrijedi

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Npr, ako je $f(x) = x^2 + 7x$, a $g(x) = \sin x$, onda je

$$(g \circ f)(x) = \sin\left(x^2 + 7x\right)$$

pa je

$$(g \circ f)'(x) = \left[\sin'\left(x^2 + 7x\right)\right] \cdot \left(x^2 + 7x\right)' = (2x + 7)\cos\left(x^2 + 7x\right).$$

Deriviranje kompozicije funkcija jedne varijable

Ako su f i g derivabilne funkcije jedne varijable takve da je dobro definirana kompozicija $g \circ f$, onda je i $g \circ f$ derivabilna i vrijedi

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Npr, ako je $f(x) = x^2 + 7x$, a $g(x) = \sin x$, onda je

$$(g \circ f)(x) = \sin\left(x^2 + 7x\right)$$

pa je

$$(g \circ f)'(x) = \left[\sin'\left(x^2 + 7x\right)\right] \cdot \left(x^2 + 7x\right)' = (2x + 7)\cos\left(x^2 + 7x\right).$$

Analogno pravilo vrijedi i za funkcije više varijabli, s tim da je sada zapis nešto složeniji.

Deriviranje kompozicije funkcija više varijabli

Teorem

Neka su zadane funkcije

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^k,$$

pri čemu je $\qquad \varphi_1(D) \times \cdots \times \varphi_k(D) \subseteq X.$

Deriviranje kompozicije funkcija više varijabli

Teorem

Neka su zadane funkcije

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^k,$$

pri čemu je $\quad \varphi_1(D) \times \cdots \times \varphi_k(D) \subseteq X$. *Tada možemo definirati kompoziciju* $F = f \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k) : D \to \mathbb{R}$*:*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Deriviranje kompozicije funkcija više varijabli

Teorem

Neka su zadane funkcije

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^k,$$

pri čemu je $\varphi_1(D) \times \cdots \times \varphi_k(D) \subseteq X$. *Tada možemo definirati kompoziciju* $F = f \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k) : D \to \mathbb{R}$*:*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Ako su funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *i* f *diferencijabilne, onda je i funkcija* F *također diferencijabilna, a njene parcijalne derivacije su dane formulom*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $u_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, k$.

Deriviranje kompozicije funkcija više varijabli

Primjer

Neka su zadane diferencijabilne funkcije

$$\varphi : D \to [a, b]\,, \quad \psi : D \to [c, d]\,, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$
$$f\,:\,[a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

i neka je

$$F\,(x, y, z) = f\,(\varphi\,(x, y, z)\,, \psi\,(x, y, z))\,, \quad (x, y, z) \in D.$$

Primjer

Neka su zadane diferencijabilne funkcije

$$\varphi : D \to [a, b], \quad \psi : D \to [c, d], \qquad D \subseteq \mathbb{R}^3,$$
$$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

i neka je

$$F(x, y, z) = f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in D.$$

Uvedemo li oznake $u = \varphi(x, y, z)$ *i* $v = \psi(x, y, z)$, *onda prema prethodnom teoremu imamo*

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_u \varphi'_x + f'_v \psi'_x, \\ F'_y &= f'_u \varphi'_y + f'_v \psi'_y, \\ F'_z &= f'_u \varphi'_z + f'_v \psi'_z. \end{aligned}$$

Deriviranje kompozicije funkcija

Primjer

Neka su, uz oznake kao u primjeru od ranije, zadane funkcije
$f\left(u,v\right)=u^2v$, $\varphi\left(x,y,z\right)=xyz$ *i* $\psi\left(x,y,z\right)=x+\cos\frac{y}{z}$.

Deriviranje kompozicije funkcija

Primjer

Neka su, uz oznake kao u primjeru od ranije, zadane funkcije $f(u,v) = u^2 v$, $\varphi(x,y,z) = xyz$ *i* $\psi(x,y,z) = x + \cos\frac{y}{z}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)) = f\left(xyz, x + \cos\frac{y}{z}\right) = \\ &= (xyz)^2\left(x + \cos\frac{y}{z}\right) = x^3y^2z^2 + x^2y^2z^2\cos\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Deriviranje kompozicije funkcija

Primjer

Neka su, uz oznake kao u primjeru od ranije, zadane funkcije $f(u,v) = u^2 v$, $\varphi(x,y,z) = xyz$ *i* $\psi(x,y,z) = x + \cos\frac{y}{z}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z)) = f\left(xyz, x + \cos\frac{y}{z}\right) = \\ &= (xyz)^2\left(x + \cos\frac{y}{z}\right) = x^3y^2z^2 + x^2y^2z^2\cos\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Direktno računanje:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z) &= 3x^2y^2z^2 + 2xy^2z^2\cos\frac{y}{z} \\ F'_y(x,y,z) &= 2x^3yz^2 + 2x^2yz^2\cos\frac{y}{z} + x^2y^2z^2\left(-\sin\frac{y}{z}\right)\frac{1}{z} \\ &= 2x^3yz^2 + 2x^2yz^2\cos\frac{y}{z} - x^2y^2z\sin\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Primjer

$$
\begin{aligned}
F_z'(x,y,z) &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^2z^2\left(-\sin\frac{y}{z}\right)\frac{-y}{z^2} \\
&= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^3\sin\frac{y}{z}
\end{aligned}
$$

Deriviranje kompozicije funkcija

Primjer

$$\begin{aligned} F_z'(x,y,z) &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^2z^2\left(-\sin\frac{y}{z}\right)\frac{-y}{z^2} \\ &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^3\sin\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Pomoću formula

$$f_u' = 2uv = 2xyz\left(x + \cos\frac{y}{z}\right), \quad f_v' = u^2 = (xyz)^2,$$

Primjer

$$\begin{aligned} F_z'(x,y,z) &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^2z^2\left(-\sin\frac{y}{z}\right)\frac{-y}{z^2} \\ &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^3\sin\frac{y}{z} \end{aligned}$$

Pomoću formula

$$f_u' = 2uv = 2xyz\left(x + \cos\frac{y}{z}\right), \quad f_v' = u^2 = (xyz)^2,$$

$$\varphi_x' = yz, \quad \varphi_y' = xz, \quad \varphi_z' = xy,$$

Deriviranje kompozicije funkcija

Primjer

$$
\begin{aligned}
F'_z(x,y,z) &= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^2z^2\left(-\sin\frac{y}{z}\right)\frac{-y}{z^2} \\
&= 2x^3y^2z + 2x^2y^2z\cos\frac{y}{z} + x^2y^3\sin\frac{y}{z}
\end{aligned}
$$

Pomoću formula

$$
f'_u = 2uv = 2xyz\left(x + \cos\frac{y}{z}\right), \quad f'_v = u^2 = (xyz)^2,
$$

$$
\varphi'_x = yz, \quad \varphi'_y = xz, \quad \varphi'_z = xy,
$$

$$
\psi'_x = 1, \quad \psi'_y = -\frac{1}{z}\sin\frac{y}{z}, \quad \psi'_z = \frac{y}{z^2}\sin\frac{y}{z}.
$$

Primjer

Uvrštavanjem dobijemo

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,z) &= 2xyz\left(x+\cos\frac{y}{z}\right)yz+(xyz)^2\\
F'_y(x,y,z) &= 2xyz\left(x+\cos\frac{y}{z}\right)xz+(xyz)^2\left(-\frac{1}{z}\sin\frac{y}{z}\right),\\
F'_z(x,y,z) &= 2xyz\left(x+\cos\frac{y}{z}\right)xy+(xyz)^2\frac{y}{z^2}\sin\frac{y}{z},
\end{aligned}$$

kao i prije.

Napomena

Ako je F zadana kao u Teoremu, onda je njen diferencijal jednak

$$\begin{aligned}
dF(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{dx}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\ldots,u_k)\cdot\left(\varphi_j\right)'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)\right)\mathrm{dx}_i \\
&= \sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\ldots,u_k)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_j\right)'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{dx}_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} f'_{u_j}(u_1,\ldots,u_k)\cdot du_j \\
&= df(u_1,\ldots,u_k)\,.
\end{aligned}$$

Diferencijal višeg reda

Diferencijal višeg reda za funkciju jedne varijable $y = f(x)$ definira se induktivno

$$\begin{aligned} d^2 f &\equiv d^2 y = d(\mathrm{dy}) = f''(x)\,\mathrm{dx}^2 \\ &\dots \\ d^n f &\equiv d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = f^{(n)}\,\mathrm{dx}^n\,. \end{aligned}$$

Diferencijal višeg reda

Diferencijal višeg reda za funkciju jedne varijable $y = f(x)$ definira se induktivno

$$\begin{aligned} d^2 f &\equiv d^2 y = d(\mathrm{dy}) = f''(x)\,\mathrm{dx}^2 \\ &\dots \\ d^n f &\equiv d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = f^{(n)}\,\mathrm{dx}^n\,. \end{aligned}$$

Posebno je

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ i općenito } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Diferencijal višeg reda

Definicija

Neka funkcija f ima u okolini $K(T,\delta) \subseteq D$ sve parcijalne derivacije do uključivo $(r-1)$-vog reda. Ako su sve parcijalne derivacije $(r-1)$-vog reda funkcije f diferencijabilne u točki T, onda **totalni diferencijal** *r-tog reda funkcije f u točki T definiramo kao*

$$d^r f(T) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f(T)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} \mathrm{dx}_{i_1} \mathrm{dx}_{i_2} \cdots \mathrm{dx}_{i_r}.$$

Diferencijal višeg reda

Primjer

Neka je f *funkcija dviju varijabli.*

Diferencijal višeg reda

Primjer

Neka je f funkcija dviju varijabli. Pod pretpostavkom da f u nekoj okolini točke (x, y) ima neprekidne sve parcijalne derivacije r-tog reda, uvažavajući Schwartzov teorem, za $r = 2$ imamo

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= f''_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ &\quad + f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + f''_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \\ &= f''_{xx}(x,y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f''_{yy}(x,y)(\mathrm{d}y)^2, \end{aligned}$$

Diferencijal višeg reda

Primjer

Neka je f funkcija dviju varijabli. Pod pretpostavkom da f u nekoj okolini točke (x, y) ima neprekidne sve parcijalne derivacije r-tog reda, uvažavajući Schwartzov teorem, za $r = 2$ imamo

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= f''_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ &\quad + f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + f''_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \\ &= f''_{xx}(x,y)\,(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f''_{yy}(x,y)\,(\mathrm{d}y)^2, \end{aligned}$$

za $r = 3$ imamo

$$\begin{aligned} d^3 f(x,y) &= f'''_{xxx}(x,y)\,(\mathrm{d}x)^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)\,(\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}y + \\ &\quad + 3f'''_{xyy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,(\mathrm{d}y)^2 + f'''_{yyy}(x,y)\,(\mathrm{d}y)^3. \end{aligned}$$

Primjer

Indukcijom se dokaže da za bilo koji r vrijedi

$$d^r f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-i} \partial y^i} (\mathrm{dx})^{r-i} (\mathrm{dy})^i .$$

Diferencijal višeg reda

Primjer

Indukcijom se dokaže da za bilo koji r vrijedi

$$d^r f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-i} \partial y^i} (\mathrm{dx})^{r-i} (\mathrm{dy})^i .$$

Zbog očigledne analogije s binomnom formulom, gornji izraz često skraćeno zapisujemo kao

$$d^r f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{dy} \right)^r f(x,y) .$$

Diferencijal višeg reda

Napomena

Analogna formula vrijedi i za funkcije triju i više varijabli. Ako $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *zadovoljava uvjete Schwartzovog teorema, možemo pisati*

$$d^r f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Primjer

Neka je $f(x,y) = e^{x-2y}$.

Primjer

Neka je $f(x,y) = e^{x-2y}$. *Tada je*

$$f_x'(x,y) = e^{x-2y}, \qquad f_y'(x,y) = -2e^{x-2y},$$

Primjer

Neka je $f(x,y) = e^{x-2y}$. *Tada je*

$$f'_x(x,y) = e^{x-2y}, \qquad f'_y(x,y) = -2e^{x-2y},$$

$$f''_{xx}(x,y) = e^{x-2y}, \quad f''_{xy}(x,y) = -2e^{x-2y}, \quad f''_{yy}(x,y) = (-2)^2\, e^{x-2y},$$

Diferencijal višeg reda

Primjer

Neka je $f(x,y) = e^{x-2y}$. *Tada je*

$$f'_x(x,y) = e^{x-2y}, \qquad f'_y(x,y) = -2e^{x-2y},$$

$$f''_{xx}(x,y) = e^{x-2y}, \quad f''_{xy}(x,y) = -2e^{x-2y}, \quad f''_{yy}(x,y) = (-2)^2 e^{x-2y},$$

i td.

$$\frac{\partial^r}{\partial x^{r-i} \partial y^i} f(x,y) = (-2)^i e^{x-2y}.$$

Primjer

Neka je $f(x,y) = e^{x-2y}$. *Tada je*

$$f'_x(x,y) = e^{x-2y}, \qquad f'_y(x,y) = -2e^{x-2y},$$

$$f''_{xx}(x,y) = e^{x-2y}, \quad f''_{xy}(x,y) = -2e^{x-2y}, \quad f''_{yy}(x,y) = (-2)^2 e^{x-2y},$$

i td.

$$\frac{\partial^r}{\partial x^{r-i} \partial y^i} f(x,y) = (-2)^i e^{x-2y}.$$

Dakle

$$d^r \left(e^{x-2y}\right) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-2)^i e^{x-2y} (\mathrm{dx})^{r-i} (\mathrm{dy})^i$$

Taylorova formula

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i točke

$$T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), \quad T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D.$$

Taylorova formula

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i točke

$$T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), \quad T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D.$$

Činjenicu da je f diferencijabilna u točki T_0 možemo interpretirati na sljedeći način:

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i točke

$$T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), \quad T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D.$$

Činjenicu da je f diferencijabilna u točki T_0 možemo interpretirati na sljedeći način: za svaku točku $T \in K(T_0, \delta) \subseteq D$ vrijedi

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)\left(x_i - x_i^0\right) + R_1(T),$$

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i točke

$$T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), \quad T = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D.$$

Činjenicu da je f diferencijabilna u točki T_0 možemo interpretirati na sljedeći način: za svaku točku $T \in K\left(T_0, \delta\right) \subseteq D$ vrijedi

$$f\left(T\right) = f\left(T_0\right) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\left(T_0\right)\left(x_i - x_i^0\right) + R_1\left(T\right),$$

pri čemu ostatak $R_1\left(T\right)$ ima svojstvo da teži k nuli kad T teži k T_0 i to brže nego T teži k T_0, odnosno

$$\lim_{T \to T_0} \frac{R_1\left(T\right)}{\rho} = 0, \quad \rho = d\left(T, T_0\right).$$

Taylorova formula

Ako je točka T blizu točki T_0, tj. ako je ρ malen, onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T) \approx f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)\left(x_i - x_i^0\right).$$

Taylorova formula

Ako je točka T blizu točki T_0, tj. ako je ρ malen, onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T) \approx f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)\left(x_i - x_i^0\right).$$

U slučaju funkcije jedne (dvije) varijable, ovo je značilo da se točka na krivulji (plohi) koja predstavlja graf funkcije f, može aproksimirati odgovarajućom točkom na tangenti (tangencijalnoj ravnini).

Taylorova formula

Ako je točka T blizu točki T_0, tj. ako je ρ malen, onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T) \approx f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)\left(x_i - x_i^0\right).$$

U slučaju funkcije jedne (dvije) varijable, ovo je značilo da se točka na krivulji (plohi) koja predstavlja graf funkcije f, može aproksimirati odgovarajućom točkom na tangenti (tangencijalnoj ravnini).
Želimo li aproksimaciju većeg stupnja točnosti, moramo ubaciti i vrijednosti parcijalnih derivacija viših redova.

Taylorova formula

Ako je točka T blizu točki T_0, tj. ako je ρ malen, onda je veličina $R_1(T)$ zanemarivo malena pa se vrijednost funkcije f u točki T može računati korištenjem približne jednakosti

$$f(T) \approx f(T_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(T_0)\left(x_i - x_i^0\right).$$

U slučaju funkcije jedne (dvije) varijable, ovo je značilo da se točka na krivulji (plohi) koja predstavlja graf funkcije f, može aproksimirati odgovarajućom točkom na tangenti (tangencijalnoj ravnini).
Želimo li aproksimaciju većeg stupnja točnosti, moramo ubaciti i vrijednosti parcijalnih derivacija viših redova.
Koristeći Taylorovu formulu za funkcije jedne varijable te formulu za deriviranje kompozicije funkcija više varijabli lako se dobije Taylorova formula za funkcije više varijabli:

Taylorova formula

Teorem

Ako funkcija f *ima u nekoj okolini* $K(T_0, \delta) \subseteq D$ *neprekidne parcijalne derivacije do uključivo* $(m+1)$*-vog reda,* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *onda za svaku točku* $T \in K(T_0, \delta)$ *vrijedi* **Taylorova formula**

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0) + R_m(T).$$

Taylorova formula

Teorem

Ako funkcija f ima u nekoj okolini $K(T_0, \delta) \subseteq D$ neprekidne parcijalne derivacije do uključivo $(m+1)$-vog reda, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onda za svaku točku $T \in K(T_0, \delta)$ vrijedi **Taylorova formula**

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0) + R_m(T).$$

Ovdje je

$$R_m(T) = \frac{(1-\theta)^{m+1-p}}{m!p} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m+1} f(T_\theta)$$

za neki unaprijed zadani $p \in \mathbb{N}$, a $0 < \theta < 1$ zavisi o T i određuje točku

$$T_\theta = \left(x_1^0 + \theta\left(x_1 - x_1^0\right), \ldots, x_n^0 + \theta\left(x_n - x_n^0\right)\right) \in \overline{T_0 T}.$$

Taylorova formula

Napomena

Ako su uvjeti Teorema ispunjeni za svaki $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i ako je*

$$\lim_{m\to\infty} R_m(T) = 0, \qquad \forall T \in K(T_0, \delta),$$

onda graničnim prijelazom iz Taylorove formule razvoj funkcije u **Taylorov red** *oko točke* T_0

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0).$$

Napomena

Ako su uvjeti Teorema ispunjeni za svaki $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i ako je*

$$\lim_{m \to \infty} R_m(T) = 0, \qquad \forall T \in K(T_0, \delta),$$

onda graničnim prijelazom iz Taylorove formule razvoj funkcije u **Taylorov red** *oko točke* T_0

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^r f(T_0).$$

U slučaju $T_0 = (0, \ldots, 0)$ *Taylorova formula (red) zove se Maclaurinova formula (red).*

Napomena

Podsjetimo se da je $x_i - x_i^0 = \Delta x_i = \mathrm{d}x_i$ *prirast ili diferencijal nezavisne varijable* x_i.

Taylorova formula

Napomena

Podsjetimo se da je $x_i - x_i^0 = \Delta x_i = \mathrm{d}x_i$ *prirast ili diferencijal nezavisne varijable* x_i.

Dakle Taylorovu formulu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$f\left(T\right) = f\left(T_0\right) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} d^r f\left(T_0\right) + R_m\left(T\right),$$

Napomena

Podsjetimo se da je $x_i - x_i^0 = \Delta x_i = \mathrm{d}x_i$ *prirast ili diferencijal nezavisne varijable* x_i.
Dakle Taylorovu formulu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} d^r f(T_0) + R_m(T),$$

tj. Taylorov red kao:

$$f(T) = f(T_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} d^r f(T_0).$$

Taylorova formula

Primjer

Izračunajmo razvoj funkcije $f(x, y) = e^{x+y}$ *u Taylorov red u okolini točke* $T_0 = (1, -1)$.

Taylorova formula

Primjer

Izračunajmo razvoj funkcije $f(x, y) = e^{x+y}$ *u Taylorov red u okolini točke* $T_0 = (1, -1)$.
Lako se vidi da je f *beskonačno derivabilna na* $\mathbb{R}^2$ *jer su sve parcijalne derivacije svih redova jednake polaznoj funkciji.*

Taylorova formula

Primjer

Izračunajmo razvoj funkcije $f(x,y) = e^{x+y}$ *u Taylorov red u okolini točke* $T_0 = (1,-1)$.
Lako se vidi da je f *beskonačno derivabilna na* $\mathbb{R}^2$ *jer su sve parcijalne derivacije svih redova jednake polaznoj funkciji.*
Dakle,

$$\begin{aligned}
d^k f(1,-1) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{dy}\right)^k f(1,-1) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f(1,-1)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} (\mathrm{dx})^{k-i} (\mathrm{dy})^i \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\mathrm{dx})^{k-i} (\mathrm{dy})^i = (\mathrm{dx} + \mathrm{dy})^k \\
&= (\Delta x + \Delta y)^k = [(x-1) + (y+1)]^k = (x+y)^k .
\end{aligned}$$

Primjer

Dakle, razvoj u Taylorov red će biti

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

ako pokažemo da ostatak $R_k(x, y) \to 0$ *u svakoj točki* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Primjer

Dakle, razvoj u Taylorov red će biti

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

ako pokažemo da ostatak $R_k(x,y) \to 0$ *u svakoj točki* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *No uzmemo li tzv. Lagrangeov ostatak* $(p = m+1)$ *imamo*

$$|R_k(x,y)| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x+y|^{k+1}$$

pa je $\lim_{k\to\infty} |R_k(x,y)| = 0$.

Taylorova formula

Primjer

Dakle, razvoj u Taylorov red će biti

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

ako pokažemo da ostatak $R_k(x,y) \to 0$ *u svakoj točki* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
No uzmemo li tzv. Lagrangeov ostatak $(p = m+1)$ *imamo*

$$|R_k(x,y)| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x+y|^{k+1}$$

pa je $\lim_{k\to\infty} |R_k(x,y)| = 0$.
Ovaj red smo mogli dobiti i direktno iz Maclaurinovog razvoja funkcije $e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *pomoću formalne zamjene* $x \to x+y$.